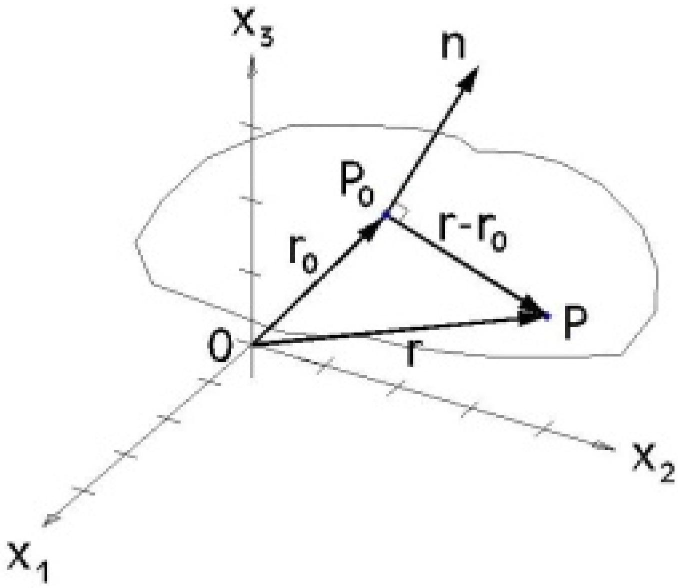
Zweiundzwanzigste Woche, 23. November, Copyright © 2009 by Gerhard Oberressl

0.1 Gleichungen der Ebene

0.1.1 Ebene eines Normalvektors durch einen Punkt

Jeder Vektor bestimmt eine Schar von Ebenen, auf denen er sechtrecht steht. Gegeben sei ein beliebiger Vektor $\mathbf{n}$, der nicht der Nullvektor ist und ein beliebiger Punkt P_0. Wir suchen die Ebene, die von der Wirkungslinie des Vektors $\mathbf{n}$ senkrecht durchdrungen wird und gleichzeitig den Punkt P_0 enthält. Der Vektor $\mathbf{n}$ kann sich irgendwo im Raum befinden. In der Abb. 0.1 ist der Repräsentant seiner Äquivalenzklasse mit Anfang P_0 dargestellt. Jeder Vektor normal zu einer Ebene ist ein Normalvektor der Ebene. Für

Abbildung 0.1: Gleichung der Ebene durch P_0 senkrecht zu $\mathbf{n}$



einen beliebigen Punkt P der Ebene liegt der Vektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ in der Ebene und ist senkrecht zu $\mathbf{n}$, sodass sein Skalarprodukt mit $\mathbf{n}$ null ergibt: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, oder $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 = -D$, wobei wir mit $-D$ die Konstante $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ bezeichnen. Die Gleichung der Ebene in Vektorschreibweise ist dann

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + D = 0. \tag{0.1}$$

0.1.2 Ebene in Komponentenschreibweise

Setzten wir in Gleichung 0.1 den Vektor $\mathbf{n} = (A, B, C)$ und den Ortsvektor des allgemeinen, beliebigen Punktes P, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, dann erhalten wir die Gleichung der Ebene in Komponentenschreibweise:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0. \tag{0.2}$$

0.1.3 Parameterdarstellung einer Ebene

Zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ definieren immer eine Schar von Ebenen, die zu beiden parallel sind. Durch einen fixen Punkt P_0 geht ganau eine dieser Ebenen. Sei P ein beliebiger Punkt dieser Ebene (ausser P_0), dann gilt $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_2$. Die Paramameterdarstellung einer Ebene im Raum lautet daher

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_2. \tag{0.3}$$

0.1.4 Ebene gegeben durch drei Punkte

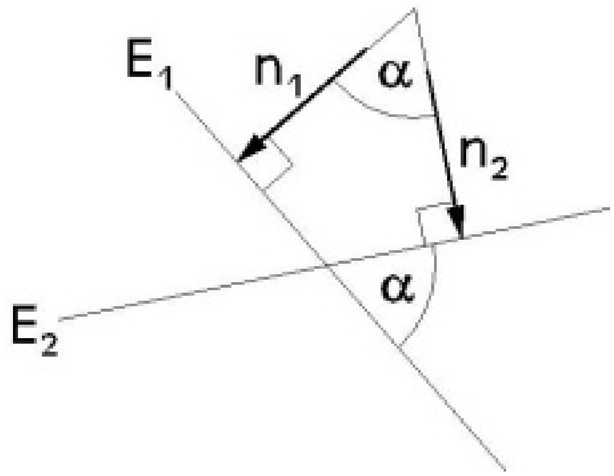
Die Ebene die durch drei Punkt P_1, P_2 und P_3 gehen soll, finden wir mit Gleichung 0.3, indem wir $\mathbf{a}_1 = \overline{P_1 P_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ und $\mathbf{a}_2 = \overline{P_1 P_3} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ setzen. Die Gleichung lautet dann

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \mu(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1). \tag{0.4}$$

0.1.5 Die Winkel zwischen zwei Ebenen

Geben seien die zwei Ebenen
$E_1 : \quad A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3 + D_1 = 0$ und
$E_2 : \quad A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 + D_2 = 0.$

Abbildung 0.2: Winkel zwischen zwei Ebenen



$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ und $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ sind dann die beiden Normalvektoren der Ebenen.
Abb. 0.2 entnehmen wir, dass der Winkel α zwischen den Ebenen dem Winkel zwischen den beiden Normalvektoren entspricht. Das Skalarprodukt $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\| \cos \alpha$ liefert

$$\alpha = \arccos \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}. \tag{0.5}$$